Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Titulación: Grado en Ingeniería Química
Asignatura: Matemáticas I

Programación Lineal. Ejercicios y Complementos

1. Resuelve el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x,y) = 2x + 3y \\ \text{sujeto a} & x + y \geq 5 \\ & x + 3y \geq 9 \\ & 4x + y \geq 8 \\ & x, y \geq 0 \end{cases}$$

2. ¿Tiene solución el siguiente problema ? ¿Por qué ?

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & f(x,y) = 2x + 3y \\ \text{sujeto a} & x + y \geq 5 \\ & x + 3y \geq 9 \\ & 4x + y \geq 8 \\ & x, y \geq 0 \end{cases}$$

3. ¿Tiene solución el siguiente problema ? En caso afirmativo, ¿Cuántas tiene ? ¿Por qué ?

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x,y) = 2x + y \\ \text{sujeto a} & 2x + y \geq 20 \\ & 2x - y \leq 20 \\ & 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$

4. Supongamos que tenemos una compañía que produce dos productos P_1 y P_2. Se supone que disponemos de dos talleres de trabajo E_1 y E_2 los cuales pueden elaborar ambos productos. Se sabe que si el taller E_1 se dedicara a la producción de P_1 podría procesar 40 unidades del mismo al día mientras que si se dedicara a la producción de P_2 procesaría 60 unidades al día. Por su parte, el taller E_2 es capaz de procesar 50 unidades al día de P_1 y también 50 de P_2. La rentabilidad que obtiene la empresa por cada producto es de 200 para P_1 y 400 para P_2. Si la compañía es capaz de disponer de toda su producción, la pregunta es: ¿cuál ha de ser la distribución de la producción de los productos para que el beneficio sea máximo?. Haz un modelo matemático para este problema y resuélvelo con Maxima.

5. Una pequeña central eléctrica consta de dos generadores. El primero proporciona unos beneficios de 3 euros/MWh con una potencia máxima de salida de 4 MWh, mientras que el segundo genera unos beneficios de 5 euros/MWh con una potencia máxima de 6 MWh. Además el sistema debe ajustarse en todo momento de modo que la siguiente restricción requerida por el sistema de refrigeración se cumpla: tres veces la potencia de salida del primero más el doble de la del segundo no puede exceder en ningún caso de 18 MWh. ¿Cuál es la potencia óptima de salida de cada generador desde el punto de vista de maximizar los beneficios?

6. Una determinada empresa dispone de dos minas A y B dedicadas a la extracción de carbón. La mina A es capaz de producir diariamente 1 tonelada de carbón de máxima calidad, 2 toneladas de calidad media y 6 toneladas de calidad baja. El coste diario que supone mantener abierta y a pleno rendimiento esta mina (es decir, el coste de producción diario) es de 1000 euros. Por su parte, la mina B produce diariamente 2 toneladas de carbón de máxima calidad, 5 toneladas de calidad media y 6 toneladas de calidad baja. El coste de producción diario para la mina B es de 1400 euros. La empresa recibe un pedido de 90 toneladas

de carbón de máxima calidad, 120 de calidad media y 180 de baja calidad. Evidentemente, el propietario de la empresa desea averiguar cuántos días se debe trabajar en cada mina para que el pedido sea satisfecho y el coste total de producción sea mínimo. Escribe un modelo matemático para este problema y resuélvelo con Maxima.

7. Una empresa que produce violines, guitarras y violas utiliza madera, mano de obra y metal en su construcción. Las cantidades de cada recurso que se precisan para realizar una unidad de cada instrumento musical se muestran en la tabla siguiente:

	Violín	Guitarra	Viola
Madera	2	1	1
Mano de obra	2	1	2
Metal	1	1	1

La empresa dispone de 50 unidades de madera, 60 unidades de trabajo y 55 de metal, y vende los violines a 200 euros, las guitarras a 175 euros y las violas a 125 euros. Se trata de encontrar la cantidad a producir de cada instrumento para maximizar los beneficios de la empresa. Escribe un modelo matemático para este problema.

8. Una fábrica de pinturas produce dos tipos diferentes de pintura (una para exteriores de casas y otra para interiores) a partir de dos materiales A y B. Las necesidades de materia prima por tonelada de pintura así como la disponibilidad diaria de los materiales está dada en la siguiente tabla:

	Exterior	Interior	Disponibilidad diaria
Materia A	1	2	6
Materia B	2	1	8

Si el precio por tonelada es de 3000 euros para la de exteriores y 2000 euros para la de interiores, escribe un modelo matemático que permita determinar cómo debe ser la producción de pintura para maximizar el beneficio.

9. Un ladrón es perseguido de cerca por la policía. Los agentes han acordanado una zona limitada por los puntos de coordenadas $(0,0)$, $(-1,1)$, $(1,3)$ y $(2,1)$ en la que saben se encuentra el ladrón. Por otra parte, el ladrón sabe que la densidad de la localización de agentes de policía que le persiguen es $x_1 - 3x_2 + 10$. Escribe un modelo matemático para encontrar el punto de fuga que el ladrón debe usar para tener la máxima probabilidad de fuga.

10. Una persona quiere invertir 100000 euros en dos tipos de acciones A y B. Las de tipo A tienen más riesgo, pero producen un beneficio del 10 %. Las de tipo B son más seguras, pero producen sólo el 7 % nominal. Decide invertir como máximo 60000 euros en la compra de acciones A y, por lo menos, 20000 euros en las de tipo B. Además, quiere que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B. ¿Cómo debe invertir los 10000 euros para que el beneficio anual sea máximo ?

Otros ejemplos más realistas de problemas de programación lineal de interés en Ingeniería Química pueden encontrarse en la siguiente referencia:

Referencias

[1] Edgar T., Himmelblau, Optimization of chemical processes, ed. McGraw-Hill, 1988.

~~Veamos algún~~

ALGUNOS EJEMPLOS CONCRETOS

Ej. 5:

Generador 1 $\begin{cases} \text{beneficios} & 3 \text{ ~~e~~ euros / Mwh} \\ \text{pot. salida máxima} & 4 \text{ Mwh} \end{cases}$

Generador 2 $\begin{cases} \text{beneficios} & 5 \text{ euros / Mwh} \\ \text{pot. ~~m~~ salida máxima} & 6 \text{ Mwh} \end{cases}$

$x_1 \equiv$ potencia de salida del generador 1

$x_2 \equiv$ " " " " " 2

objetivo: maximizar los beneficios

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2$$

Restricciones:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

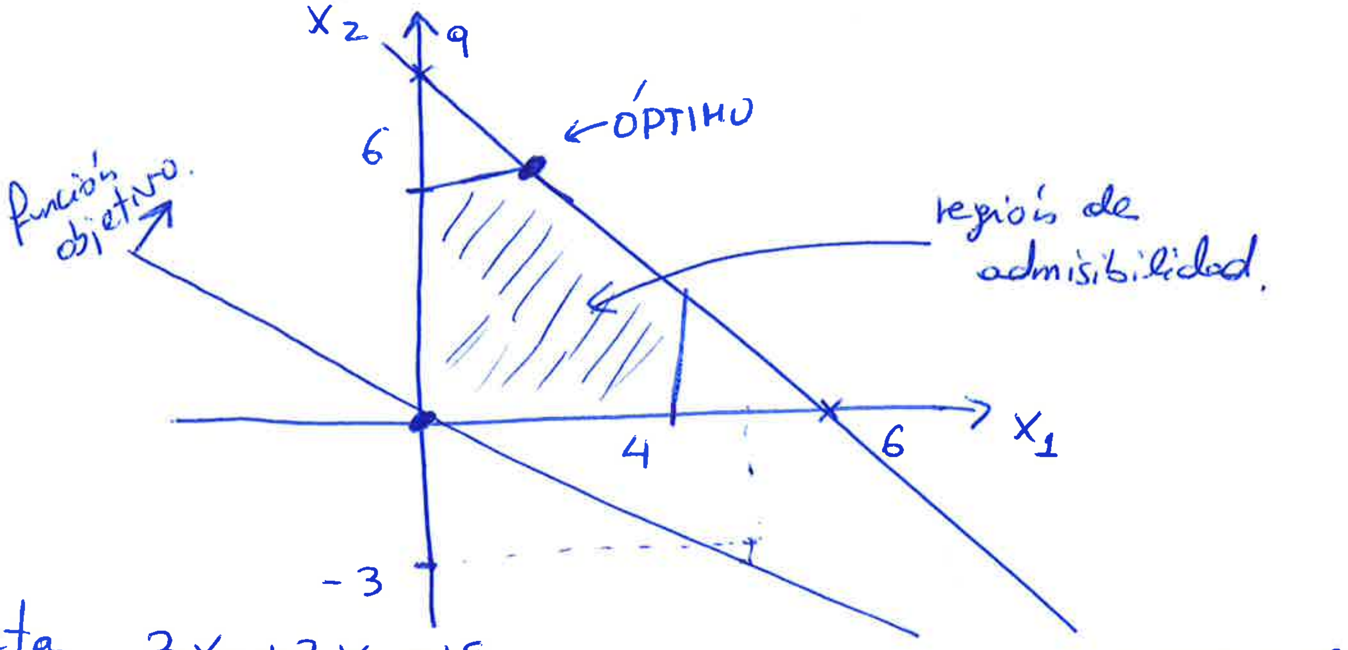
$$0 \leq x_1 \leq 4$$

$$0 \leq x_2 \leq 6$$

Modelo matemático:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & 0 \leq x_1 \leq 4 \\ & 0 \leq x_2 \leq 6 \end{cases}$$

Resolución geométrica del problema.



recta $3x_1+2x_2=18$

x_1	x_2
0	9
6	0

recta asociada a la función objetivo

$$3x_1+5x_2=k$$

para $k=0$ $\longrightarrow$

x_1	x_2
0	0
5	-3

Hemos de trasladar esta recta hacia arriba (lo que equivale a aumentar el coste k). El punto de ~~la~~ ~~reg~~ intersección de esta familia de rectas con la región de admisibilidad que proporcione el mayor k es el óptimo. En nuestro ejemplo, dicho punto corresponde con el punto de intersección de las rectas $x_2=6$ y $3x_1+2x_2=18$.

En concreto:

$$3x_1 + 2\cdot 6 = 18$$

$$3x_1 = 18-12 = 6 \rightarrow x_1 = \frac{6}{3} = 2.$$

$$\boxed{\text{Solución} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 6}$$

<u>Propiedad</u>: En programación lineal, el óptimo, si existe, se alcanza en un vértice del conjunto de admisibilidad.

Veamos algunos otros ejemplos:

1 $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x,y) = 2x+3y \\ \text{sujeto a} & \\ & x+y \geq 5 \\ & x+3y \geq 9 \\ & 4x+y \geq 8 \\ & x, y \geq 0 \end{array} \right.$

$x+3y=9$

x	y
0	3
9	0

$x+y=5$

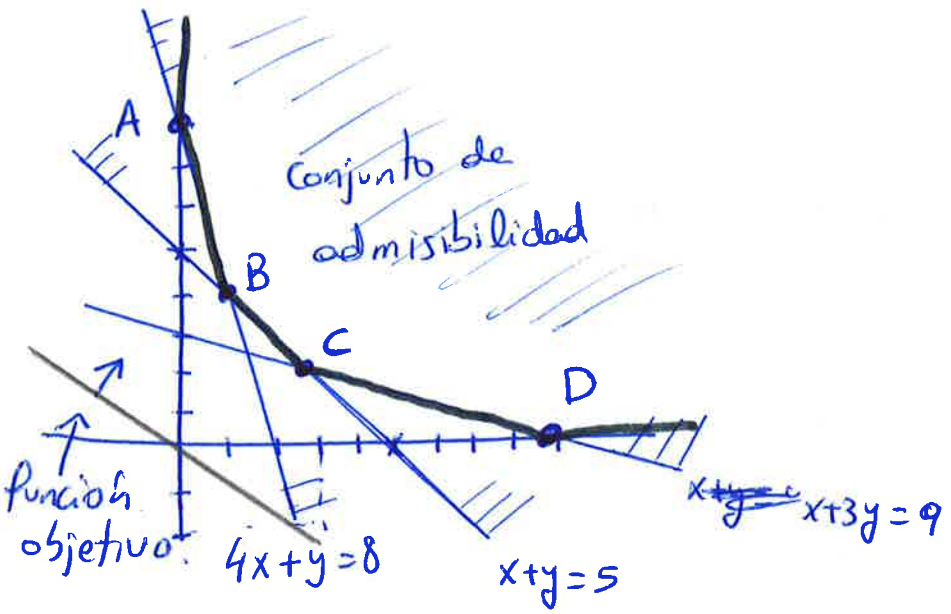
x	y
0	5
5	0

$4x+y \geq 8$

x	y
2	0
0	8

$2x+3y=0$

x	y
0	0
3	-2



- A es el punto de intersección de las rectas $x=0$ y ~~$4x+y$~~ $4x+y=8$.

$\rightarrow A=(0,8)$ $\quad f(A)=f(0,8)=24$

- $B \rightarrow \begin{cases} 4x+y=8 \\ x+y=5 \end{cases} \rightarrow B=(1,4)$, $f(B)=f(1,4)=14$

- $C \rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x+3y=9 \end{cases} \rightarrow C=(3,2)$, $f(C)=f(3,2)=12$

- $D \rightarrow \begin{cases} x+3y=9 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow D=(9,0)$, $f(D)=f(9,0)=18$.

Solución $\boxed{C=(3,2)}$

(2) Maximizar $f(x,y)=2x+3y$

sujeto a

$$\begin{cases} x+y \geq 5 \\ x+3y \geq 9 \\ 4x+y \geq 8 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

El conjunto de admisibilidad no es acotado. Gráficamente se observa que este problema NO ~~TIEE~~ TIENE SOLUCIÓN.

③ Minimizar $f(x,y) = 2x + y$

sujeto a

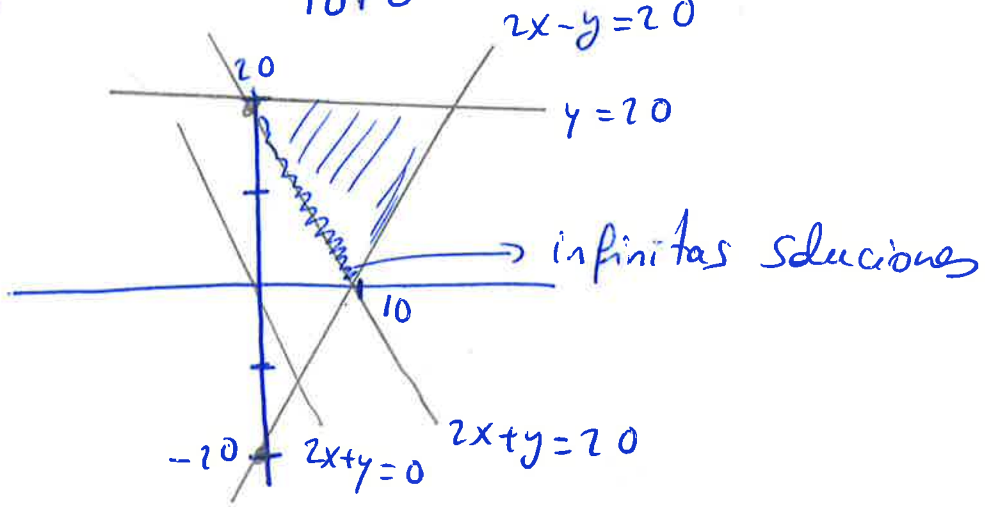
$$\begin{cases} 2x + y \geq 20 \\ 2x - y \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$$

$2x + y = 20$

x	y
0	20
10	0

$2x - y = 20$

x	y
0	-20
10	0



④ Talleres $\begin{cases} E_1 \\ E_2 \end{cases}$

Productos $\begin{cases} P_1 \\ P_2 \end{cases}$

Variable de optimización

x_1 = ~~cantidad~~ nº de unidades de P_1 en el taller E_1

x_2 = " " " " P_2 " " " "

x_3 = " " " " P_1 " " " E_2

x_4 = " " " " P_2 " " "

beneficio $200(x_1+x_3)+400(x_2+x_4)$

$$\begin{array}{l} 1 — 40 \\ x — x_1 \end{array} \quad \Big| \; x = \frac{x_1}{40}$$

$$\frac{x_1}{40} + \frac{x_2}{60} \leq 1$$

$$\frac{x_3}{50} + \frac{x_4}{50} \leq 1$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$, $\quad x_j$ enteros. Programación lineal entera

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 200(x_1+x_3)+400(x_2+x_4) \\ \text{sujeto a} \\ \qquad \dfrac{x_1}{40} + \dfrac{x_2}{60} \leq 1 \\ \qquad \dfrac{x_3}{50} + \dfrac{x_4}{50} \leq 1 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

6 Mina A $\left\{ \begin{array}{l} \text{1 tonelada de } \cancel{\text{máxima}} \text{ calidad máxima} \\ \text{2 " " " " media} \\ \text{6 " " " baja} \end{array} \right.$ coste 1000 €

Mina B $\left\{ \begin{array}{l} \text{2 toneladas de calidad máxima} \\ \text{5 " " " media} \\ \text{6 " " " baja} \end{array} \right.$ coste 1400 €

pedido = 90 toneladas de calidad máxima, 120 media y 180 baja.

Variable de optimización

x_1 = nº de días de trabajo en la mina A

x_2 = " " B.

$$\begin{cases} \text{Minimizar} \quad f(x_1, x_2) = 1000x_1 + 1400x_2 \\ \text{sujeto a} \\ \quad 1 \cdot x_1 + 2x_2 \geq 90 \\ \quad 2x_1 + 5x_2 \geq 120 \\ \quad 6x_1 + 6x_2 \geq 180 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(7) x_1 = nº de ~~guitarras~~ violines a construir

x_2 = " " guitarras " " .

x_3 = " " violas " "

~~la~~ beneficio $f(x_1, x_2, x_3) = 200x_1 + 175x_2 + 125x_3$

Restricciones

$$2x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \leq 50$$

$$2x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 60$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 55$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} \text{Maximizar } f(x_1,x_2,x_3) = 200x_1 + 175x_2 + 125x_3 \\ \text{sujeto a} \\ \quad 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \\ \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 55 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Es un problema de programación lineal entera.

(8) x_1 = toneladas de pintura tª exterior

x_2 = " " " interior

beneficio $f(x_1,x_2) = 3000x_1 + 2000x_2$

restricciones

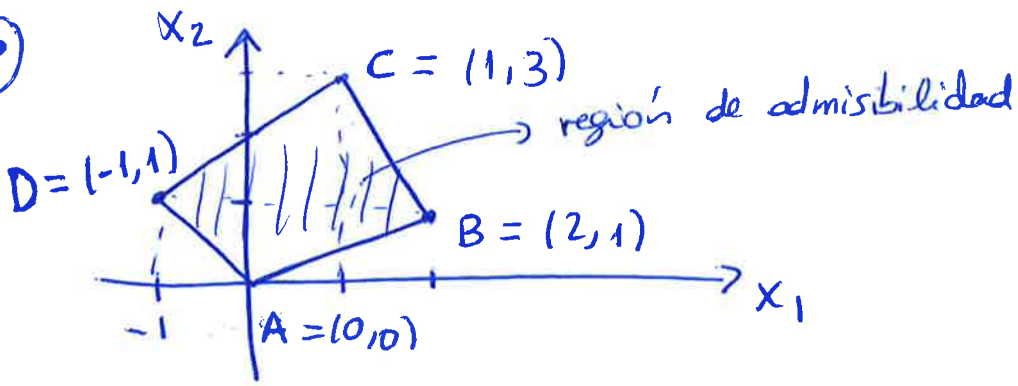
$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 8.$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$\begin{cases} \text{Maximizar } f(x_1,x_2) = 3000x_1 + 2000x_2 \\ \text{sujeto a} \\ \quad 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 6 \\ \quad 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 8 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

9



- recta que une A con B: $x_2 = a x_1 + b$;

$$0 = a \cdot 0 + b \rightarrow b = 0$$
$$1 = a \cdot 2 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} x_1$$

- recta que une B con C: $x_2 = a x_1 + b$;

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a \cdot 2 + b \\ 3 = a \cdot 1 + b \end{array}\right\}$$
$$2 = -a \rightarrow$$
$$b = 3 - a = 5$$

$$x_2 = -2x_1 + 5$$

- recta que une C con D: $x_2 = a x_1 + b$;

B

$$\left.\begin{array}{l} 3 = a \cdot 1 + b \\ 1 = -a + b \end{array}\right\}$$
$$4 = 2b \rightarrow b = 2$$
$$a = b - 1 = 1$$

$$x_2 = x_1 + 2$$

- recta que une D con A:

$$x_2 = a x_1 + b$$
$$\left.\begin{array}{l} 1 = -a + b \\ 0 = a \cdot 0 + b \end{array}\right\}$$
$$b = 0 \rightarrow a = -1$$

$$x_2 = -x_1.$$

$$\begin{cases} \text{Minimizar } f(x_1,x_2) = x_1 - 3x_2 + 10. \\ \text{sujeto a} \\ \quad x_2 - \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \\ \quad x_2 + 2x_1 - 5 \leq 0 \\ \quad x_2 - x_1 - 2 \leq 0 \\ \quad x_2 + x_1 \geq 0 \end{cases}$$

~~$x_1, x_2 \geq 0$~~.

10

x = inversión en acciones tipo A

y = " " " " B.

$$\begin{cases} \text{beneficio: } 0.1x + 0.07y \\ \text{restricciones} \\ \quad x + y \leq 100.000 \\ \quad x \leq 60.000 \\ \quad y \geq 20.000 \\ \quad x \geq y \\ \quad x, y \geq 0 \end{cases}$$

100 — 10

$x \rightarrow ?$

$? = \frac{10x}{100} = 0.1x$

100 — 7

x — ?

$? = \frac{7x}{100} = 0.07$

PROGRAMACION LINEAL. EJERCICIOS Y COMPLEMENTOS

```
(%i1) load(simplex);
(%o1) /usr/share/maxima/5.32.1/share/simplex/simplex.mac
```

EJERCICIO 4

```
(%i2) maximize_lp(200*(x1+x3)+400*(x2+x4),
                  [x1/40 + x2/60 <=1,
                   x3/50 + x4/50 <=1],
                  [x1,x2,x3,x4]);
(%o2) [44000,[x4=50,x3=0,x2=60,x1=0]]
```

EJERCICIO 6

```
(%i3) minimize_lp(1000*x1 + 1400*x2,
                  [x1+2*x2>=90,
                   2*x1+5*x2>=120,
                   6*x1+6*x2>=180],
                  [x1,x2]);
(%o3) [63000,[x2=45,x1=0]]
```

EJERCICIO 7

```
(%i4) maximize_lp(200*x+175*y+125*z,
                  [2*x+y+z<=50,
                   2*x+y+2*z<=60,
                   x+y+z<=55],
                  [x,y,z]);
(%o4) [8750,[z=0,y=50,x=0]]
```

EJERCICIO 10

```
(%i5) maximize_lp(0.1*x+0.007*y,
                  [x+y<=10,
                   x<=6,
                   x>=0,
                   y>=2,
                   x>=y]);
(%o5) [0.628,[y=4,x=6]]
```